

Hong Kong Mathematics Olympiad (2020/21)

Individual Paper 1

香港數學競賽 (2020/21)

個人項目卷一

Unless otherwise stated, all answers should be given in exact numerals in their simplest form.  
No approximation is accepted.

The diagrams are not necessarily drawn to scale.

除特別指明外，所有答案須以數字的真確值表達，並化至最簡。

不接受近似值。

所有附圖不一定依比例繪成。

Part A

甲部

1. Given that  $W = a^b - b^a$ , where  $a \neq b \neq 0$ . If  $W$  is a non-negative integer, find the least value of  $W$ .

已知  $W = a^b - b^a$ ，其中  $a \neq b \neq 0$ 。若  $W$  為一非負整數，求  $W$  的最小值。

2. Find the last two digits of  $2^{2021}$ .

求  $2^{2021}$  的最尾兩位數字。

3.  $\alpha$  and  $\beta$  are the roots of the equation  $x^2 - 7x + 4 = 0$ . Find the value of  $\alpha^3 + \beta^3$ .

$\alpha$  及  $\beta$  為方程  $x^2 - 7x + 4 = 0$  的根。求  $\alpha^3 + \beta^3$  的值。

4. Find the value of  $8\cos^2 15^\circ \cos^2 30^\circ - 8\sin^2 15^\circ \cos^2 30^\circ$ .

求  $8\cos^2 15^\circ \cos^2 30^\circ - 8\sin^2 15^\circ \cos^2 30^\circ$  的值。

5. In Figure 1, three unit circles are placed inside an equilateral triangle  $ABC$  such that any circle is tangential to two sides of the triangle and to the other two circles. Find the area of  $\triangle ABC$ .

在圖一中，三個單位圓位於一等邊三角形  $ABC$  內，使得每個圓均與另外兩圓及三角形的兩邊相切。求  $\triangle ABC$  的面積。

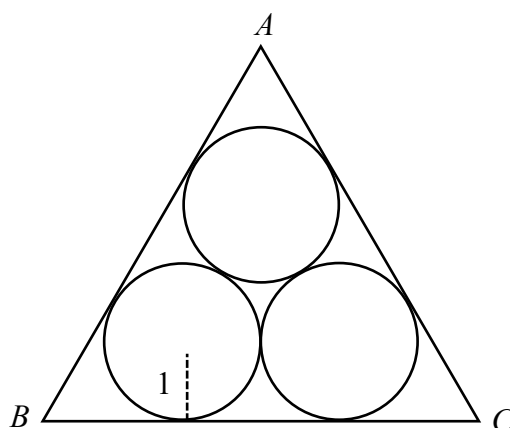


Figure 1

圖一

6. In Figure 2, the altitude of an equilateral triangle  $ABC$  is 15 cm.  $P$  is a point inside  $\triangle ABC$ . The perpendicular distances from  $P$  to  $AB$ ,  $BC$  and  $AC$  are  $h$  cm, 4 cm and 5 cm respectively. Find the value of  $h$ .

在圖二中，等邊三角形  $ABC$  的高為 15 cm。 $P$  為  $\triangle ABC$  內的一點。從  $P$  與  $AB$ 、 $BC$  和  $AC$  的垂直距離分別為  $h$  cm、4 cm 和 5 cm。求  $h$  的值。

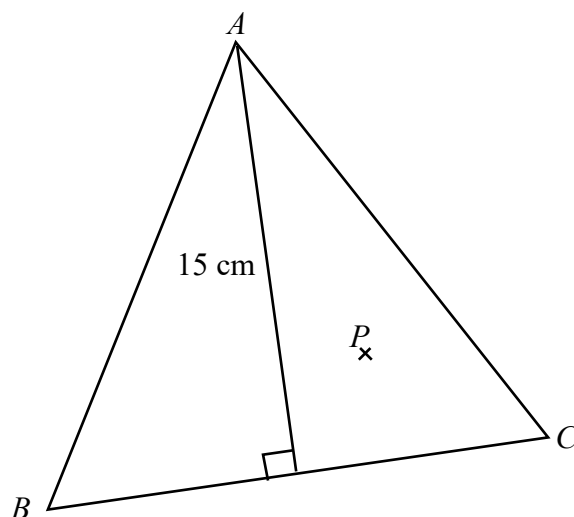


Figure 2

圖二

7.  $p, q$  and  $r$  are prime numbers. If  $pqr = 7(p + q + r)$ , find the value of  $p + q + r$ .

$p$ 、 $q$  及  $r$  為質數。若  $pqr = 7(p + q + r)$ ，求  $p + q + r$  的值。

8. Find the value of  $\frac{1001 \times 1002}{\frac{1}{1 + \frac{1}{1002}} + \frac{2}{2 + \frac{2}{1002}} + \frac{3}{3 + \frac{3}{1002}} + \dots + \frac{1001}{1001 + \frac{1001}{1002}}}$ .

求  $\frac{1001 \times 1002}{\frac{1}{1 + \frac{1}{1002}} + \frac{2}{2 + \frac{2}{1002}} + \frac{3}{3 + \frac{3}{1002}} + \dots + \frac{1001}{1001 + \frac{1001}{1002}}}$  的值。

9. How many even numbers between 4000 and 7000 have four different digits?

在 4000 和 7000 之間 4 個數位各不相同的偶數有多少個？

10. In Figure 3,  $BEF$ ,  $ADE$  and  $CFD$  are straight lines such that  $BE:EF=1:2$ ,  $AD:DE=1:3$  and  $CF:FD=1:4$ . If the area of  $\triangle DEF$  is 24 square unit, find the area of  $\triangle ABC$ .

在圖三中， $BEF$ 、 $ADE$  及  $CFD$  是直線，使得  $BE:EF=1:2$ ， $AD:DE=1:3$  及  $CF:FD=1:4$ 。若  $\triangle DEF$  的面積是 24 平方單位，求  $\triangle ABC$  的面積。

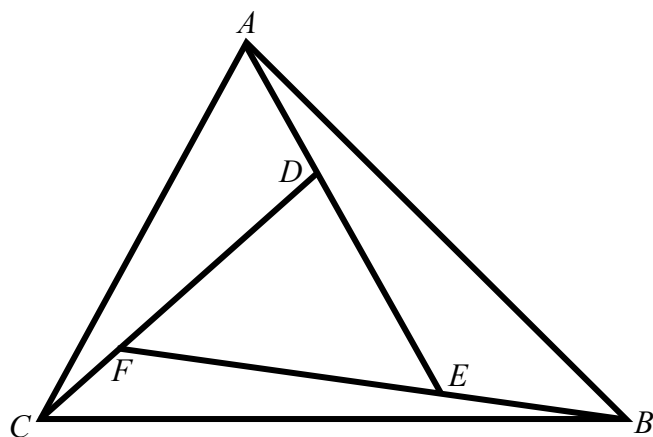


Figure 3

圖三

**Part B**

**乙部**

11. If  $\log_9 x^{18} = (\log_3 x)^3$ , find the least value of  $x$ .

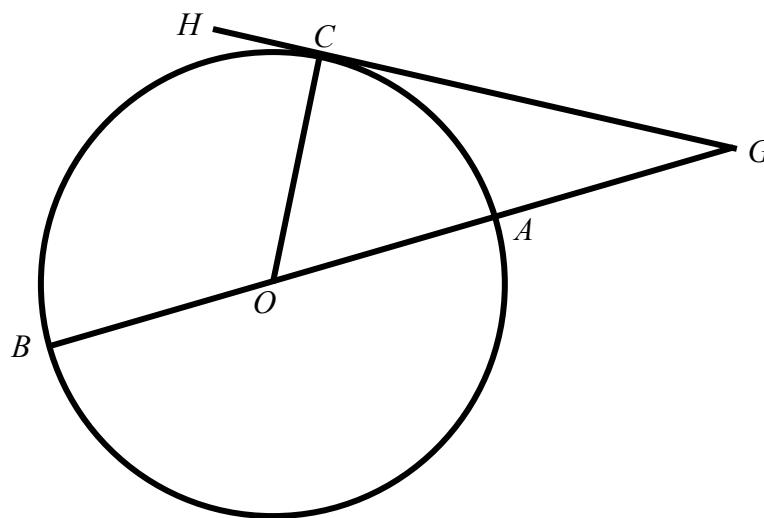
若  $\log_9 x^{18} = (\log_3 x)^3$ ，求  $x$  的最小值。

12. Let  $f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + x^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (x+5)^2}$ , where  $x$  is a real number. Find the minimum value of  $f(x)$ .

設  $f(x) = \sqrt{(x-3)^2 + x^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (x+5)^2}$ ，其中  $x$  為一實數。求  $f(x)$  的最小值。

13. In Figure 4,  $O$  is the centre of the circle. The diameter  $BA$  is produced to a point  $G$  such that  $GH$  is a tangent to the circle at  $C$ . If  $OA = 5$  and  $GC = 12$ , find the length of  $BC$ .

在圖四中， $O$  是圓的圓心。直徑  $BA$  延長至點  $G$  使得  $GH$  是圓在  $C$  上的切線。若  $OA = 5$  及  $GC = 12$ ，求  $BC$  的長度。



**Figure 4**

**圖四**

14. For each real number  $x$ , the function  $f(x)$  has the following property

$$f(x) + f(x-1) = x^2.$$

If  $f(19) = 94$ , find the value of  $f(94)$ .

對任意實數  $x$ ，函數  $f(x)$  有以下性質

$$f(x) + f(x-1) = x^2。$$

若  $f(19) = 94$ ，求  $f(94)$  的值。

15. Given that  $(x+2y)^2 = 2xy - 3x + 6y - 9$ . If  $x$  and  $y$  are real number, find the value of  $x+y$ .

已知  $(x+2y)^2 = 2xy - 3x + 6y - 9$ 。若  $x$  及  $y$  為實數，求  $x+y$  的值。

**END**

完